

$A_2 \neq \emptyset$,

所以 $A_1 \cap A_2 \neq \emptyset$ 是 $A_1 \cap A_2$ 是封闭集的充要条件, 命题 q 是真命题.

(3)【证明】若非空集合 A 是封闭集,

当 $A = \mathbf{R}$ 时, $\mathbb{C}_{\mathbf{R}}A = \emptyset$, 因此 $\mathbb{C}_{\mathbf{R}}A$ 不是封闭集;

当 $A \neq \mathbf{R}$ 时, 假设 $\mathbb{C}_{\mathbf{R}}A$ 是封闭集,

不妨设 $0 \in A$, 在 $\mathbb{C}_{\mathbf{R}}A$ 中任取一个 $x, x \neq 0$, 则 $-x \in A$,

否则若 $-x \in \mathbb{C}_{\mathbf{R}}A$, 则此时 $x + (-x) = 0 \in \mathbb{C}_{\mathbf{R}}A$, 与 $0 \in A$ 矛盾,

因此 $(-x)^2 \in A, x^2 \in \mathbb{C}_{\mathbf{R}}A$, 而 $(-x)^2 = x^2$, 与 $A \cap (\mathbb{C}_{\mathbf{R}}A) = \emptyset$ 矛盾,

所以当 $0 \in A$ 时, $\mathbb{C}_{\mathbf{R}}A$ 不是封闭集,

同理当 $0 \in \mathbb{C}_{\mathbf{R}}A$ 时, $\mathbb{C}_{\mathbf{R}}A$ 不是封闭集.

所以 A 的补集不是封闭集.

第二章 一元二次函数、方程和不等式

2.1 等式

基础必刷

1. D 【解析】对于选项 A, 由等式的性质知, 若 $x = y$, 则 $x + 5 = y + 5$, A 正确;

对于选项 B, 若 $a^2 = -2a$, 则 $a = -2$ 或 $a = 0$, B 正确;

对于选项 C, 由等式的性质知, 若 $\frac{a}{c} = \frac{b}{c}$, 则 $a = b$, C 正确;

对于选项 D, 由等式的性质知, 若 $x = y$, 则 $\frac{x}{a} = \frac{y}{a}$ 的前提条件为 $a \neq 0$, D 不正确.

故选 D.

2. C 【解析】对于选项 A, $x^2 - 8xy + 16y^2 = x^2 - 2x \cdot 4y + (4y)^2 = (x - 4y)^2$, 故该选项正确, 不符合题意;

对于选项 B, $x(x - y) + y(y - x) = (x - y)^2$, 故该选项正确, 不符合题意;

对于选项 C, $x^2 - 4x - 5 = (x + 1)(x - 5)$, 故该选项不正确, 符合题意;

对于选项 D, $16x^4 - 1 = (4x^2)^2 - 1 = (4x^2 + 1)(4x^2 - 1) = (4x^2 + 1)(2x + 1)(2x - 1)$, 故该选项正确, 不符合题意. 故选 C.

3. C 【解析】由 $\begin{cases} x^2 + y^2 - 1 = 0, \\ y - x - m = 0 \end{cases}$ 消去 y , 得 $2x^2 + 2mx + m^2 - 1 = 0$, 又

方程组有唯一的一组解, 所以方程 $2x^2 + 2mx + m^2 - 1 = 0$ 有两个相等的实数根, 所以 $\Delta = 4m^2 - 4 \times 2 \times (m^2 - 1) = 0$, 解得 $m = \pm\sqrt{2}$, 故 C 项正确. 故选 C.

4. A 【解析】设每头牛值金 x 两, 每只羊值金 y 两,

$$\text{由题意可得} \begin{cases} 5x + 2y = 10, \\ 2x + 5y = 8, \end{cases} \text{解得} \begin{cases} x = \frac{34}{21}, \\ y = \frac{20}{21}, \end{cases}$$

所以每头牛值金 $\frac{34}{21}$ 两, 每只羊值金 $\frac{20}{21}$ 两.

故选 A.

5. D 【解析】由题意得 $-1 + \frac{8}{3} = -\frac{b}{3} \Rightarrow b = -5$; $6 \times \left(-\frac{2}{3}\right) = \frac{c}{3} \Rightarrow$

$c = -12$, 所以 $b + c = -5 - 12 = -17$. 故选 D.

6. B 【解析】设公共实数根为 t ,

则 $at^2 + bt + c = 0, bt^2 + ct + a = 0, ct^2 + at + b = 0$,

三式相加得 $(a + b + c)t^2 + (a + b + c)t + a + b + c = 0$,

即 $(a + b + c)(t^2 + t + 1) = 0$. 因为 $t^2 + t + 1 = \left(t + \frac{1}{2}\right)^2 + \frac{3}{4} > 0$,

所以 $a + b + c = 0$, 所以 $\frac{(a + b)(a^2 - ab + b^2) + c^3}{abc}$

$$\begin{aligned} &= \frac{(a + b)[(a + b)^2 - 3ab] + c^3}{abc} \\ &= \frac{-c(c^2 - 3ab) + c^3}{abc} = \frac{3abc}{abc} = 3. \end{aligned}$$

故选 B.

7. -1 【解析】 $\because (3, -2) \in \left\{ (x, y) \mid \begin{cases} ax + by = 2, \\ bx + ay = -3 \end{cases} \right\}, \therefore \begin{cases} 3a - 2b = 2, \\ 3b - 2a = -3, \end{cases}$

两式相加可得 $a + b = -1$.

8. 【解】(1) 由 $2x^4 - 5x^2 - 3 = 0 \Rightarrow (2x^2 + 1)(x^2 - 3) = 0 \Rightarrow (2x^2 + 1)(x - \sqrt{3})(x + \sqrt{3}) = 0$,

因为 $2x^2 + 1 \neq 0$, 所以 $x = -\sqrt{3}$ 或 $x = \sqrt{3}$.

所以原方程的解集为 $\{-\sqrt{3}, \sqrt{3}\}$.

(2) 因为 $\begin{cases} \frac{x^2}{3} + y^2 = 1, \\ x - 2y - 2 = 0, \end{cases}$ 所以 $\begin{cases} x^2 + 3y^2 = 3, \text{①} \\ x = 2(y + 1), \text{②} \end{cases}$

将②代入①得 $4(y + 1)^2 + 3y^2 = 3$,

整理得 $7y^2 + 8y + 1 = 0$, 即 $(y + 1)(7y + 1) = 0$, 解得 $y = -\frac{1}{7}$ 或 $y = -1$.

当 $y = -\frac{1}{7}$ 时, $x = \frac{12}{7}$; 当 $y = -1$ 时, $x = 0$.

所以原方程组的解集为 $\left\{ (x, y) \mid \begin{cases} x = \frac{12}{7}, \\ y = -\frac{1}{7} \end{cases} \text{或} \begin{cases} x = 0, \\ y = -1 \end{cases} \right\}$.

刷易错

易错点 1 求方程的解集时要注意方程解的特征

9. D 【解析】由 $\frac{m}{1-x} + 2 = \frac{3}{x-1}$ 去分母得 $-m + 2(x - 1) = 3$, 解得 $x =$

$$\frac{m+5}{2}.$$

关于 x 的分式方程 $\frac{m}{1-x} + 2 = \frac{3}{x-1}$ 有正数解, 则 $\frac{m+5}{2} > 0$, 解得 $m > -5$.

又 $x=1$ 是增根, 当 $x=1$ 时, 由 $\frac{m+5}{2} = 1$, 得 $m = -3$, 所以 $m \neq -3$.

由根式 $\sqrt{2-m}$ 有意义, 得 $2-m \geq 0$, 解得 $m \leq 2$, 因此 $-5 < m \leq 2$ 且 $m \neq -3$.

又因为 m 为整数, 所以 m 可以为 $-4, -2, -1, 0, 1, 2$, 所以符合条件的整数 m 的和是 $(-4) + (-2) + (-1) + 0 + 1 + 2 = -4$. 故选 D.

易错警示 解分式方程容易出错的地方是方程本身成立的条件, 本题是分母 $1-x \neq 0$ 且 $x-1 \neq 0$, 忽略此处易导致增根, 再一个容易出错的地方是去分母时会忘记 $1-x$ 与 $x-1$ 互为相反数, 出现去分母时丢掉负号的情况.

易错点 2 忽视一元二次方程有解的条件而致误

10. 【解】 (1) 当 $k = -2$ 时, 方程 $x^2 - (2k-1)x + k^2 + 1 = 0$ 可化为 $x^2 + 5x + 5 = 0$, 由 x_1, x_2 是方程 $x^2 + 5x + 5 = 0$ 的两个实数根, 得

$$x_1 + x_2 = -5, x_1 x_2 = 5, \text{ 且 } \Delta > 0,$$

$$\text{则 } x_1^2 + x_2^2 = (x_1 + x_2)^2 - 2x_1 x_2 = 25 - 10 = 15.$$

$$(2) \text{ 由题意得 } x_1 + x_2 = 2k-1, x_1 x_2 = k^2 + 1,$$

$$\text{则 } \frac{1}{x_1} + \frac{1}{x_2} = \frac{x_1 + x_2}{x_1 x_2} = \frac{2k-1}{k^2 + 1} = -\frac{3}{2}, \text{ 整理得 } 3k^2 + 4k + 1 = (3k +$$

$$1)(k+1) = 0, \text{ 解得 } k = -\frac{1}{3} \text{ 或 } k = -1.$$

$$\text{由 } \Delta = (2k-1)^2 - 4(k^2 + 1) = -4k - 3 \geq 0, \text{ 得 } k \leq -\frac{3}{4}, \text{ 所以 } k = -1.$$

易错警示 本题很容易忽视一元二次方程有解的条件, 即判别式大于等于 0, 还易误认为一元二次方程有两个实数根是两个不相等的实数根, 得出判别式大于 0 的错误结论, 而本题中一元二次方程有两个实数根, 可能是两个不相等的实数根, 还有可能是两个相等的实数根. 在利用根与系数的关系时, 也很容易在两根之和的记忆上出错, 出现把负号丢掉的情况.

2.2 不等式的性质

基础必刷

1. C 【解析】 对于选项 A, 已知 $a > c$, 两边同时乘 b , 当 $b = 0$ 时, $ab = bc$, 所以选项 A 错误;

对于选项 B, 已知 $a > b$, 两边同时乘 $|c|$, 当 $c = 0$ 时, $a|c| = b|c|$, 所以选项 B 错误;

对于选项 C, 由题意可知 $a - c > b - c > 0$, 两边同时乘

$$\frac{1}{(a-c)(b-c)}, \text{ 可得 } \frac{1}{b-c} > \frac{1}{a-c}, \text{ 所以选项 C 正确;}$$

已知 $a > b > c$, 当 $a = 1, b = -1, c = -3$ 时, $a^2 = b^2 < c^2$, 所以选项 D 错误. 故选 C.

2. C 【解析】 因为 $m = 4a - b^2, n = a^2 - 2b + 5$,

$$\text{所以 } n - m = a^2 - 2b + 5 - (4a - b^2) = a^2 - 2b + 5 - 4a + b^2 = (a-2)^2 + (b-1)^2 \geq 0, \text{ 当且仅当 } a = 2 \text{ 且 } b = 1 \text{ 时等号成立,}$$

所以 $n \geq m$. 故选 C.

3. A 【解析】 $\frac{1}{b-c} + \frac{1}{c-a} = \frac{b-a}{(b-c)(c-a)}.$

因为 $a > b > c$, 所以 $b-a < 0, b-c > 0, c-a < 0$,

$$\text{所以 } \frac{1}{b-c} + \frac{1}{c-a} = \frac{b-a}{(b-c)(c-a)} > 0. \text{ 故选 A.}$$

4. D 【解析】 由题意得 $\begin{cases} 170 < x+y \leq 190, \\ x > y. \end{cases}$ 故选 D.

5. C 【解析】 对于 A, 当 $a > b > 0$ 时, $a^2 > b^2 > 0$, 则 $\frac{1}{a^2} < \frac{1}{b^2}$, 故 A

错误;

对于 B, 当 $b = 1, a = -2$ 时, 满足 $b > a$, 但不满足 $\frac{1}{a^2} > \frac{1}{b^2}$, 故 B 错误;

对于 C, 当 $b < a < 0$ 时, $0 < a^2 < b^2$, 则 $\frac{1}{a^2} > \frac{1}{b^2}$, 反过来, $\frac{1}{a^2} > \frac{1}{b^2}$

时, $a^2 < b^2 \Rightarrow |a| < |b|$, 推不出 $b < a < 0$, 所以 $b < a < 0$ 是 $\frac{1}{a^2} > \frac{1}{b^2}$ 成立的一个充分不必要条件, 故 C 正确;

对于 D, 当 $a = 2, b = -1$ 时, 满足 $ab(a-b) < 0$, 但不满足 $\frac{1}{a^2} >$

$\frac{1}{b^2}$, 故 D 错误. 故选 C.

6. B 【解析】 方法一: 令 $9x - y = m(x - y) + n(4x - y)$,

$$\text{则 } \begin{cases} m+4n=9, \\ -m-n=-1, \end{cases} \text{ 解得 } \begin{cases} m=-\frac{5}{3}, \\ n=\frac{8}{3}. \end{cases}$$

$$\therefore -4 \leq x-y \leq -1, -1 \leq 4x-y \leq 5,$$

$$\therefore \frac{5}{3} \leq -\frac{5}{3}(x-y) \leq \frac{20}{3}, -\frac{8}{3} \leq \frac{8}{3}(4x-y) \leq \frac{40}{3},$$

$$\therefore -1 \leq -\frac{5}{3}(x-y) + \frac{8}{3}(4x-y) \leq 20, \text{ 即 } -1 \leq 9x-y \leq 20.$$

$$\text{方法二: 令 } m = x-y, n = 4x-y, \text{ 则 } \begin{cases} x = \frac{n-m}{3}, \\ y = \frac{n-4m}{3}, \end{cases}$$

$$\text{则 } 9x-y = \frac{8}{3}n - \frac{5}{3}m.$$

$$\therefore -4 \leq m \leq -1, \therefore \frac{5}{3} \leq -\frac{5}{3}m \leq \frac{20}{3},$$

$$\therefore -1 \leq n \leq 5, \therefore -\frac{8}{3} \leq \frac{8}{3}n \leq \frac{40}{3}.$$

$$\therefore -1 \leq \frac{8}{3}n - \frac{5}{3}m \leq 20, \text{即 } -1 \leq 9x-y \leq 20.$$

故选 B.

7. ABC 【解析】对于 A, 若 $a < b < 0$, 则 $a-b < 0, a+b < 0$,

$$\text{所以 } a^3 + b^3 - a^2b - ab^2 = a^2(a-b) + b^2(b-a) = (a^2 - b^2)(a-b) = (a+b)(a-b)^2 < 0, \text{所以 } a^3 + b^3 < a^2b + ab^2, \text{故 A 错误;}$$

对于 B, 若 $a < b < 0$, 则 $b-a > 0, ab > 0$,

$$\text{所以 } \frac{1}{a} - \frac{1}{b} = \frac{b-a}{ab} > 0, \text{所以 } \frac{1}{a} > \frac{1}{b}, \text{故 B 错误;}$$

对于 C, 若 $a > b > 0$, 则 $b-a < 0, a+2 > 0$,

$$\text{所以 } \frac{b}{a} - \frac{b+2}{a+2} = \frac{b(a+2) - (b+2)a}{a(a+2)} = \frac{2(b-a)}{a(a+2)} < 0, \text{所以 } \frac{b}{a} < \frac{b+2}{a+2}, \text{故 C 错误;}$$

对于 D, 若 $a > b > 0$, 则 $a-b > 0, a+b > 0, ab > 0$,

$$\text{所以 } a - \frac{b}{a} - b + \frac{a}{b} = (a-b) + \frac{(a-b)(a+b)}{ab} = (a-b) \cdot \left(1 + \frac{a+b}{ab}\right) > 0, \text{所以 } a - \frac{b}{a} > b - \frac{a}{b}, \text{故 D 正确.}$$

故选 ABC.

8. 1, -1 (答案不唯一) 【解析】当 $a > 0, b < 0$ 时, 满足 $a > b, \frac{1}{a} < \frac{1}{b}$ 为假命题. 故可取 $a = 1, b = -1$ (答案不唯一).

9. $\frac{2ab}{a+b}$ 乙 【解析】设甲每次购买这种物品的数量为 m , 乙每次购买这种物品所花的钱数为 n ,

$$\text{则甲两次购买这种物品的平均价格为 } \frac{am+bm}{m+m} = \frac{a+b}{2},$$

$$\text{乙两次购买这种物品的平均价格为 } \frac{2n}{\frac{n}{a} + \frac{n}{b}} = \frac{2ab}{a+b},$$

$$\frac{a+b}{2} - \frac{2ab}{a+b} = \frac{(a+b)^2 - 4ab}{2(a+b)} = \frac{a^2 + b^2 - 2ab}{2(a+b)} = \frac{(a-b)^2}{2(a+b)} > 0,$$

$$\text{故 } \frac{a+b}{2} > \frac{2ab}{a+b}, \text{即购物比较经济合算的是乙.}$$

刷易错

易错点 1 不能正确理解不等式的性质而致误

10. ACD 【解析】对于 A, 取 $a = -2, b = 1$, 可知 $\frac{1}{a} > \frac{1}{b}$ 不成立, 因此选项 A 不正确;

$$\text{对于 B, } \because a > b > 0, \therefore \frac{b+1}{a+1} - \frac{b}{a} = \frac{a-b}{a(a+1)} > 0, \therefore \frac{b+1}{a+1} > \frac{b}{a}, \text{因此}$$

选项 B 正确;

对于 C, 取 $a = b = 1$, 则 $ab = 1$, 因此选项 C 不正确;

对于 D, 取 $b = 0$, 则 $cb^2 = ab^2$, 因此选项 D 不正确.

故选 ACD.

易错警示

使用不等式性质时, 一定要注意不等式性质的使用条件, 如不等式两边同乘一个数, 不等式符号不改变的条件是这个数大于 0.

易错点 2 使用不等式性质时, 非等价变形而致误

11. 【解】(1) 由 $1 \leq a+b \leq 8, 3 \leq a-b \leq 4$, 得 $4 \leq (a+b) + (a-b) \leq 12$,

$$\text{即 } 4 \leq 2a \leq 12, \text{所以 } 2 \leq a \leq 6.$$

$$\text{因为 } b = \frac{1}{2}[(a+b) - (a-b)] = \frac{1}{2}[(a+b) + (b-a)],$$

$$\text{又 } 3 \leq a-b \leq 4, \text{所以 } -4 \leq b-a \leq -3. \text{又 } 1 \leq a+b \leq 8,$$

$$\text{所以 } -3 \leq (a+b) - (a-b) \leq 5, \text{所以 } -\frac{3}{2} \leq \frac{1}{2}[(a+b) - (a-b)] \leq \frac{5}{2},$$

$$\text{即 } -\frac{3}{2} \leq b \leq \frac{5}{2}, \text{故实数 } a \text{ 的取值范围为 } \{a | 2 \leq a \leq 6\}, \text{实数}$$

$$b \text{ 的取值范围为 } \left\{b \mid -\frac{3}{2} \leq b \leq \frac{5}{2}\right\}.$$

$$(2) \text{ 设 } 2a-5b = m(a+b) + n(a-b) = (m+n)a + (m-n)b,$$

$$\text{则 } \begin{cases} m+n=2, \\ m-n=-5, \end{cases} \text{ 解得 } \begin{cases} m=-\frac{3}{2} \\ n=\frac{7}{2} \end{cases}, \text{所以 } 2a-5b = -\frac{3}{2}(a+b) + \frac{7}{2}(a-b).$$

$$\text{又 } 1 \leq a+b \leq 8, 3 \leq a-b \leq 4.$$

$$\text{所以 } -12 \leq -\frac{3}{2}(a+b) \leq -\frac{3}{2}, \frac{21}{2} \leq \frac{7}{2}(a-b) \leq 14,$$

$$\text{故 } -\frac{3}{2} \leq 2a-5b \leq \frac{25}{2},$$

$$\text{即 } 2a-5b \text{ 的取值范围为 } \left\{2a-5b \mid -\frac{3}{2} \leq 2a-5b \leq \frac{25}{2}\right\}.$$

易错警示

利用不等式的性质求取值范围, 要建立待求范围的整体与已知范围的关系, 最后利用不等式的性质进行运算, 求得待求的范围. 同向不等式的两边可以相加, 这种转化不是等价变形, 如果在解题过程中多次使用这种转化, 就有可能扩大其取值范围造成错误, 例如本题如果直接用 (1) 问中 a, b 的取值范围来求解, 会扩大 $2a-5b$ 的取值范围.

2.3 基本不等式

基础必刷

1. C 【解析】对于 A, 若 $a=-1, b=-2$, 则满足 $ab>0$, 且 $a>b$, 而 $a^2=1, b^2=4, a^2<b^2$, 所以 A 错误;

对于 B, 若 $a=-1, b=-2$, 则满足 $ab>0$, 且 $a>b$, 而 $\frac{1}{a}=-1, \frac{1}{b}=-\frac{1}{2}, \frac{1}{a}<\frac{1}{b}$, 所以 B 错误;

对于 C, 因为 $ab>0$, 所以 $\frac{b}{a}>0, \frac{a}{b}>0$, 所以 $\frac{b}{a}+\frac{a}{b}\geq 2\sqrt{\frac{b}{a}\cdot\frac{a}{b}}=2$, 当且仅当 $\frac{a}{b}=\frac{b}{a}$, 即 $a=b$ 时取等号, 而 $a>b$, 所以取不到等号, 所以 $\frac{b}{a}+\frac{a}{b}>2$, 所以 C 正确;

对于 D, 若 $a=-1, b=-2$, 则满足 $ab>0$, 且 $a>b$, 而 $\frac{a+b}{2}=-\frac{3}{2}, \sqrt{ab}=\sqrt{2}, \frac{a+b}{2}<\sqrt{ab}$, 所以 D 错误.

故选 C.

2. A 【解析】因为 $m<10$, 所以 $10-m>0$,

$$\text{所以 } m+\frac{9}{m-10}=m-10+\frac{9}{m-10}+10=10-\left(10-m+\frac{9}{10-m}\right)\leq 10-$$

$$2\sqrt{(10-m)\cdot\frac{9}{10-m}}=10-6=4,$$

当且仅当 $10-m=\frac{9}{10-m}$, 即 $m=7$ 时取等号.

故选 A.

3. D 【解析】因为 $m, n\in(0, +\infty)$, 且 $\frac{1}{m}+\frac{1}{n}=1$,

$$\text{所以 } m+2n=(m+2n)\left(\frac{1}{m}+\frac{1}{n}\right)=3+\frac{2n}{m}+\frac{m}{n}\geq 3+$$

$$2\sqrt{\frac{2n}{m}\cdot\frac{m}{n}}=3+2\sqrt{2},$$

当且仅当 $\frac{2n}{m}=\frac{m}{n}$, 即 $n=1+\frac{\sqrt{2}}{2}, m=1+\sqrt{2}$ 时取等号.

故选 D.

4. C 【解析】由题图可知, $OF=\frac{1}{2}AB=\frac{1}{2}(a+b), OC=\frac{1}{2}(a+$

$$b)-b=\frac{1}{2}(a-b).$$

在 $\text{Rt}\triangle OCF$ 中, 由勾股定理可得 $CF=\sqrt{\left(\frac{a+b}{2}\right)^2+\left(\frac{a-b}{2}\right)^2}=$

$$\sqrt{\frac{a^2+b^2}{2}}. \because CF\geq OF, \therefore \sqrt{\frac{a^2+b^2}{2}}\geq\frac{1}{2}(a+b). \text{ 故选 C.}$$

5. D 【解析】设长方体车厢(无盖)的长为 a , 高为 $b, a>0, b>0$, 则由题得 $2a+2ab+2\times 2b=96$, 即 $96-2ab=2a+4b$,

$$\text{所以 } 96-2ab=2a+4b\geq 2\sqrt{2a\cdot 4b}=4\sqrt{2}\cdot\sqrt{ab},$$

即 $ab+2\sqrt{2}\cdot\sqrt{ab}-48\leq 0$, 当且仅当 $a=2b$ 时等号成立,

$$\text{解 } ab+2\sqrt{2}\cdot\sqrt{ab}-48\leq 0, \text{ 得 } 0<\sqrt{ab}\leq 4\sqrt{2}, \text{ 即 } 0<ab\leq 32.$$

因为车厢的容积为 $2ab\text{ m}^3$ 且 $2ab\leq 64$, 当且仅当 $a=8, b=4$ 时, 等号成立, 所以车厢的最大容积是 64 m^3 .

故选 D.

6. C 【解析】对于 A, 当 $a=4, b=4$ 时, 满足 $\frac{1}{a}+\frac{1}{b}\leq 1$, 但 $a+b\leq 4$ 不成立, 故 A 错误.

对于 B, 当 $a=4, b=4$ 时, 满足 $\frac{b^2}{a}+\frac{a^2}{b}\geq 4$, 但 $a+b\leq 4$ 不成立, 故 B 错误.

对于 C, 由 $a^2+b^2\leq 8$ 可得 $\frac{(a+b)^2}{2}\leq a^2+b^2\leq 8$, 则 $a+b\leq 4$, 即充分性成立; 当 $a=3, b=1$ 时, 满足 $a+b\leq 4$, 但 $a^2+b^2\leq 8$ 不成立, 即必要性不成立, 故 C 正确.

对于 D, 当 $a=4, b=1$ 时, 满足 $\frac{b}{a}+\frac{a}{b}\geq 4$ 成立, 但 $a+b\leq 4$ 不成立, 故 D 错误.

故选 C.

7. AD 【解析】由 $a^2-ab+4b^2-c=0$, 可得 $c=a^2-ab+4b^2$,

故 $\frac{c}{ab}=\frac{a^2-ab+4b^2}{ab}=\frac{a}{b}+\frac{4b}{a}-1\geq 4-1=3$, 当且仅当 $a=2b$ 时, 等号成立, 故 A 正确;

当 $a=2b$ 时, $c=a^2-ab+4b^2=4b^2-2b^2+4b^2=6b^2$, 故 B 错误;

当 $a=2b$ 时, $a+b-c=3b-6b^2=-6\left(b-\frac{1}{4}\right)^2+\frac{3}{8}$, 当且仅当 $b=\frac{1}{4}$ 时, $a+b-c$ 有最大值 $\frac{3}{8}$, 故 D 正确, C 错误.

故选 AD.

8. 12 【解析】因为 a, b 为正实数, 满足 $(a+b)(2a+b)=3$, 所以 $(4a+4b)(6a+3b)=36$,

$$\text{所以 } (4a+4b)(6a+3b)=36\leq\frac{(4a+4b+6a+3b)^2}{4}=\frac{(10a+7b)^2}{4},$$

$$\text{则 } 10a+7b\geq 12, \text{ 当且仅当 } \begin{cases} 4a+4b=6a+3b, \\ (a+b)(2a+b)=3, \end{cases}$$

即 $a=\frac{1}{2}, b=1$ 时, 等号成立. 故 $10a+7b$ 的最小值为 12.

9. $-\frac{5}{2}$ 【解析】由 $x<\frac{3}{2}$, 得 $2x-3<0, 3-2x>0$.

$$\text{则 } y=x+\frac{8}{2x-3}=\frac{1}{2}(2x-3)+\frac{8}{2x-3}+\frac{3}{2}=$$

$$-\left[\frac{1}{2}(3-2x)+\frac{8}{3-2x}\right]+\frac{3}{2}\leq -2\sqrt{\frac{1}{2}(3-2x)\cdot\frac{8}{3-2x}}+\frac{3}{2}=-\frac{5}{2},$$

当且仅当 $\frac{3-2x}{2}=\frac{8}{3-2x}$, 即 $x=-\frac{1}{2}$ 时等号成立.

故函数 $y=x+\frac{8}{2x-3}$ 的最大值为 $-\frac{5}{2}$.

10. 【解】(1) 如图, $AB=x$ cm, 由矩形

$ABCD$ ($AB>AD$) 的周长为 16 cm, 可

知 $AD=(8-x)$ cm, 设 $PC=a$ cm, 则

$DP=(x-a)$ cm,

$\therefore \angle APD = \angle CPB', \angle ADP = \angle CB'P = 90^\circ, AD = CB',$

$\therefore \text{Rt}\triangle ADP \cong \text{Rt}\triangle CB'P, \therefore AP = PC = a$ cm,

在 $\text{Rt}\triangle ADP$ 中, 由勾股定理得 $AD^2 + DP^2 = AP^2$, 即 $(8-x)^2 +$

$$(x-a)^2 = a^2, \text{解得 } a = \frac{x^2 - 8x + 32}{x},$$

$$\therefore DP = x - a = \frac{8x - 32}{x}, \text{即 } y = \frac{8x - 32}{x} (4 < x < 8).$$

$$(2) \triangle ADP \text{ 的面积为 } S = \frac{1}{2}AD \cdot DP = \frac{1}{2}(8-x) \cdot \frac{8x-32}{x} = 4 \times$$

$$\frac{-x^2 + 12x - 32}{x} = 4 \left[-\left(x + \frac{32}{x}\right) + 12 \right] \leq 4 \times \left(-2\sqrt{x \cdot \frac{32}{x}} + 12 \right) =$$

$$48 - 32\sqrt{2},$$

当且仅当 $x = \frac{32}{x}$, 即 $x = 4\sqrt{2}$ cm 时, $\triangle ADP$ 的面积最大, 最大

面积为 $(48 - 32\sqrt{2}) \text{ cm}^2$.

11. (1) 【证明】 $\because (a+b+c)^2 = a^2 + b^2 + c^2 + 2ab + 2ac + 2bc = 0,$

$$\therefore ab + bc + ca = -\frac{1}{2}(a^2 + b^2 + c^2).$$

$\because abc = 1, \therefore a, b, c$ 均不为 0, 则 $a^2 + b^2 + c^2 > 0,$

$$\therefore ab + bc + ca = -\frac{1}{2}(a^2 + b^2 + c^2) < 0.$$

(2) 【解】由 $a+b+c=0, abc=1, a \geq b \geq c$, 可知 $a>0, b<0, c<0.$

$$\therefore a = -b - c, a = \frac{1}{bc}, \therefore a^3 = a^2 \cdot a = \frac{(b+c)^2}{bc} = \frac{b^2 + c^2 + 2bc}{bc} \geq$$

$$\frac{2bc + 2bc}{bc} = 4, \text{当且仅当 } b=c \text{ 时取等号, } \therefore a \geq \sqrt[3]{4}.$$

故 a 的最小值为 $\sqrt[3]{4}$.

刷易错

易错点 1 应用基本不等式时要注意等号成立的条件

“一正, 二定, 三相等”

12. $\{y|y \geq 4 \text{ 或 } y \leq -4\}$ 【解析】当 $x>0$ 时, $y = x + \frac{4}{x} \geq$

$$2\sqrt{x \cdot \frac{4}{x}} = 4, \text{当且仅当 } x = \frac{4}{x}, \text{即 } x = 2 \text{ 时取等号; 当 } x < 0$$

$$\text{时, } \because y = x + \frac{4}{x}, \therefore -y = (-x) + \left(-\frac{4}{x}\right) \geq 2\sqrt{(-x) \cdot \left(-\frac{4}{x}\right)} =$$

$$4, \text{即 } -y \geq 4, \therefore y \leq -4, \text{当且仅当 } -x = -\frac{4}{x}, \text{即 } x = -2 \text{ 时取等号.}$$

综上, y 的取值范围是 $\{y|y \geq 4 \text{ 或 } y \leq -4\}$.

易错警示

本题中由于 x 的范围不确定, 因此求解时要按照 x 值的正、负分类讨论, 本题的易错之处是忽视 x 的范围, 直接误认为 $x>0$, 然后使用基本不等式而造成错解. 因此使用基本不等式时一定要注意条件中的“正数”.

$$13. \frac{5}{4} \quad \text{【解析】} a\sqrt{1+b^2} = 2\sqrt{a^2 \cdot \frac{1+b^2}{4}} \leq a^2 + \frac{1+b^2}{4}.$$

$$\therefore a^2 + \frac{b^2}{4} = 1, \therefore a^2 + \frac{1+b^2}{4} = \frac{5}{4}, \therefore a\sqrt{1+b^2} \leq \frac{5}{4},$$

$$\text{当且仅当 } a^2 = \frac{1+b^2}{4}, \text{即 } a = \frac{\sqrt{10}}{4}, b = \frac{\sqrt{6}}{2} \text{ 时取等号.}$$

易错警示

使用基本不等式求最值时, 不但要满足各式为正数, 还要满足等号成立. 求解本题时容易产生以下错

$$\text{解: } a\sqrt{1+b^2} \leq \frac{a^2+1+b^2}{2}, \text{由 } a^2 + \frac{b^2}{4} = 1 \text{ 知 } b^2 = 4-4a^2, \text{所以}$$

$$\frac{a^2+1+b^2}{2} = \frac{a^2+1+4-4a^2}{2} = \frac{5-3a^2}{2} \leq \frac{5}{2}, \text{即 } a\sqrt{1+b^2} \leq \frac{5}{2}. \text{产生}$$

错解的原因是两个不等式取等号的条件不一样, 当

$$\frac{5-3a^2}{2} \leq \frac{5}{2} \text{ 成立时, 取等号的条件是 } a=0, \text{此时 } b=2, \text{这与}$$

$$a\sqrt{1+b^2} \leq \frac{a^2+1+b^2}{2} \text{ 取等号的条件是矛盾的.}$$

易错点 2 多次使用基本不等式而致误

$$14. 5 \quad \text{【解析】} \because x>0, y>0, x+y=1, \therefore m = x + \frac{1}{x} + y + \frac{1}{y} = x + \frac{x+y}{x} +$$

$$y + \frac{x+y}{y} = 3 + \frac{y}{x} + \frac{x}{y} \geq 3 + 2 = 5, \text{当且仅当 } x=y=\frac{1}{2} \text{ 时取等号.}$$

易错警示

本题的易错之处是误认为 $x + \frac{1}{x} \geq 2, y + \frac{1}{y} \geq$

$$2, \text{则 } m = x + \frac{1}{x} + y + \frac{1}{y} \geq 4, \text{产生错误的原因是两个不等式}$$

取等号的条件是 $x=y=1$, 这与已知条件矛盾.

$$15. \frac{17}{4} \quad \text{【解析】} \because x>0, y>0, \text{且 } x+y=1, \therefore 1 = x+y \geq 2\sqrt{xy},$$

$$\therefore xy \leq \frac{1}{4}, \text{当且仅当 } x=y=\frac{1}{2} \text{ 时取等号.}$$

$$\therefore \sqrt{xy} \leq \frac{1}{2}.$$

$$t = xy + \frac{1}{xy} = \left(\sqrt{xy} - \frac{1}{\sqrt{xy}}\right)^2 + 2.$$

$$\text{又 } \sqrt{xy} \leq \frac{1}{2}, \therefore \frac{1}{\sqrt{xy}} \geq 2, \therefore -\frac{1}{\sqrt{xy}} \leq -2,$$

$$\therefore \left(\sqrt{xy} - \frac{1}{\sqrt{xy}} \right)^2 + 2 \geq \left(\frac{1}{2} - 2 \right)^2 + 2 = \frac{17}{4}, \text{ 当且仅当 } x=y=\frac{1}{2}$$

时取等号.

$$\text{故 } t = xy + \frac{1}{xy} \text{ 的最小值为 } \frac{17}{4}.$$

易错警示 本题容易产生以下错解: $xy + \frac{1}{xy} \geq 2$, 当且仅当

$xy=1$ 时取等号. 而由 $x+y=1$ 可知 $xy \leq \frac{1}{4}$, 不仅两次使用基

本不等式取等号的条件不一致, 而且 $xy=1$ 也不满足 $xy \leq$

$\frac{1}{4}$, 因此这种解法是错误的.

2.4 二次函数与一元二次方程、不等式

2.4.1 一元二次函数

基础必刷

1. D 【解析】当 $b=0, a=0$ 时, $y=c$ 不是二次函数, 故 A 错误; 当 $c=0, a=0$ 时, $y=bx$ 不是二次函数, 故 B 错误; 当 $a=0, b=0$ 时, $y=c$ 不是一次函数, 故 C 错误. 故选 D.

2. A 【解析】因为 $y = -\left(x - \frac{1}{2}\right)^2 - \frac{3}{4}$, 且 $-1 \leq x \leq 1$, 所以当 $-1 \leq x \leq \frac{1}{2}$ 时, y 随 x 的增大而增大, 当 $\frac{1}{2} \leq x \leq 1$ 时, y 随 x 的增大而减小,

当 $x=-1$ 时, y 取得最小值, 最小值为 $-1-1-1=-3$, 当 $x=\frac{1}{2}$

时, y 取得最大值, 最大值为 $-\left(\frac{1}{2}-\frac{1}{2}\right)^2 - \frac{3}{4} = -\frac{3}{4}$,

则函数的取值范围为 $\left\{y \mid -3 \leq y \leq -\frac{3}{4}\right\}$.

故选 A.

3. D 【解析】因为 $a>b>c, a+b+c=0$, 所以 $a+a+a>a+b+c=0$, 即 $a>0$, 而 $c+c+c<a+b+c=0$, 故 $c<0$.

B, C 选项中图象开口向下, 不符合 $a>0$, 而 A 选项中图象过原点, 与 $c<0$ 矛盾, 故选 D.

4. D 【解析】设灯具商店销售节能灯每月的利润为 W ,

$$\text{则 } W = (x-8)(-8x+400) = -8x^2 + 464x - 3200$$

$$= -8(x^2 - 58x) - 3200 = -8(x-29)^2 + 3528 (x \in \mathbf{N}),$$

故当 $x=29 \in \mathbf{N}$ 时, W 的最大值为 3528,

所以灯具商店销售节能灯每月的最大利润为 3528 元.

故选 D.

5. D 【解析】将二次函数 $y=(x+1)(x-3)+3$ 的图象沿 y 轴向下平移 3 个单位长度后所得图象的函数解析式为 $y=(x+1)(x-3)+3-3$, 即为 $y=(x+1)(x-3)$,

此抛物线与 x 轴的两个交点的坐标分别为 $(-1, 0), (3, 0)$, 则此抛物线与 x 轴的两个交点之间的距离为 $3-(-1)=$

4. 故选 D.

6. C 【解析】由反比例函数的图象知 $k<0$, 则函数 $y=kx^2-$

$2x+k^2$ 的图象开口向下, 且对称轴为直线 $x=-\frac{-2}{2k}=\frac{1}{k}<0$, 则

当 $x=\frac{1}{k}$ 时, $y=k \cdot \left(\frac{1}{k}\right)^2 - 2 \cdot \frac{1}{k} + k^2 = k^2 - \frac{1}{k} > 0$, 则图象的

顶点 $\left(\frac{1}{k}, k^2 - \frac{1}{k}\right)$ 在第二象限. 故选 C.

7. A 【解析】因为实数 a, b 满足 $a^2-7a+5=0, b^2-7b+5=0$, 所以实数 a, b 是方程 $x^2-7x+5=0$ 的两根, 所以 $\Delta=49-20>0, a+b=7, ab=5$,

$$\text{所以 } \frac{b-1}{a-1} + \frac{a-1}{b-1} = \frac{(b-1)^2 + (a-1)^2}{(a-1)(b-1)} = \frac{a^2 + b^2 - 2(a+b) + 2}{ab - (a+b) + 1} =$$

$$\frac{(a+b)^2 - 2ab - 2(a+b) + 2}{ab - (a+b) + 1} = \frac{49 - 10 - 14 + 2}{5 - 7 + 1} = -27, \text{ 故选 A.}$$

8. D 【解析】若取 $a=-9$, 则方程为 $x^2-9x+8=0$, 解得 $x_1=1, x_2=8$, A, B 错误;

由题意可知, $\Delta=a^2-32>0$, 则 $a^2>32$,

由一元二次方程根与系数的关系可得 $x_1+x_2=-a, x_1x_2=8$,

则 $|x_1-x_2| = \sqrt{(x_1+x_2)^2 - 4x_1x_2} = \sqrt{a^2-32}$, $\sqrt{a^2-32}$ 与 $4\sqrt{2}$ 的大小关系不确定, C 错误;

$(|x_1|+|x_2|)^2 = x_1^2 + 2|x_1x_2| + x_2^2 = x_1^2 + 2x_1x_2 + x_2^2 = (x_1+x_2)^2 = a^2 > 32$, 所以 $|x_1|+|x_2| > 4\sqrt{2}$, D 正确.

9. D 【解析】由题表可得, 该函数图象的对称轴是直线 $x=\frac{0+3}{2}=$

$\frac{3}{2}$, y 值先增后减且有最大值, 则函数图象开口向下, 故 A 错

误; 函数图象与 y 轴的交点为 $(0, 1)$, 故 B 错误; 由对称性可

知当 $x=-1$ 和 $x=4$ 时的函数值相等, 则当 $x=4$ 时, $y=-3<$

0, 故 C 错误; 由题表可知, 方程的一个根在 -1 与 0 之间, 根

根据函数图象的对称轴为直线 $x=\frac{3}{2}$ 可知, 方程 $ax^2+bx+c=0$ 的

正根在 3 与 4 之间, 故 D 正确. 故选 D.

10. ACD 【解析】抛物线 $y=x^2-4x+m$, 其对称轴方程为 $x=2$. 当 $x=2$ 时, $y=m-4$. 由方程 $x^2-4x+m=0$ 有正实数根, 可得 $m-4 \leq 0$, 即 $m \leq 4$. 显然 ACD 符合题意. 而 $5 \notin \{m \mid m \leq 4\}$, 故 B 不符合题意. 故选 ACD.

11. $x=-2$ 【解析】 \therefore 二次函数 $y=ax^2+bx+c(a \neq 0)$ 的图象与 x

轴的两个交点的横坐标分别为 $x_1 = \frac{-8 + \sqrt{8^2 - 4 \times 2 \times 3}}{2 \times 2}, x_2 =$

$\frac{-8-\sqrt{8^2-4\times 2\times 3}}{2\times 2}$, \therefore 此二次函数图象的对称轴方程为 $x =$

$$\frac{1}{2}(x_1+x_2) = -2.$$

12. -3 【解析】 $\because a, b$ 是关于 x 的一元二次方程 $x^2-2x+t-1=0$ 的两个非负实根, $\therefore \Delta = 4-4(t-1) \geq 0$, 解得 $t \leq 2$,

又 $a+b=2, ab=t-1 \geq 0, \therefore t \geq 1, \therefore 1 \leq t \leq 2$.

$$\text{则 } (a^2-1)(b^2-1) = (ab)^2 - (a^2+b^2) + 1 = (ab)^2 - (a+b)^2 + 2ab + 1 = (t-1)^2 - 4 + 2(t-1) + 1 = t^2 - 4.$$

又 $1 \leq t \leq 2, \therefore -3 \leq t^2 - 4 \leq 0$. 故 $(a^2-1)(b^2-1)$ 的最小值是 -3 .

刷易错

易错点 二次项系数为参数时忽视讨论致误

13. -1 或 2 或 1 【解析】函数 $y = (a-1)x^2 - 4x + 2a$ 的图象与 x 轴有且只有一个交点.

当函数为二次函数时, $a-1 \neq 0$, 且 $\Delta = 16-4 \times (a-1) \times 2a = 0$, 解得 $a_1 = -1, a_2 = 2$;

当函数为一次函数时, $a-1=0$, 解得 $a=1$.

故实数 a 的值为 -1 或 2 或 1 .

易错警示

由于本题中没有说明函数 $y = (a-1)x^2 - 4x + 2a$ 是二次函数, 因此应考虑该函数为一次函数的特殊情况, 本题的易错之处是误认为函数是二次函数而漏解.

14. $\{m|m \geq -1\}$ 【解析】函数 $y = mx^2 + 2x - 1$ 的图象与 x 轴有交点, 当 $m=0$ 时, 显然成立; 当 $m \neq 0$ 时, $\Delta = 4+4m \geq 0$, 解得 $m \geq -1$ 且 $m \neq 0$. 故实数 m 的取值范围是 $\{m|m \geq -1\}$.

易错警示

本题的易错之处有两个: 一是误认为 $m \neq 0$; 二是二次函数的图象与 x 轴有交点包含有一个交点和有两个交点两种情况, 因此二次函数对应方程的判别式 $\Delta \geq 0$, 而不是 $\Delta > 0$.

2.4.2 一元二次不等式的解法

基础必刷

1. C 【解析】当 $a=0$ 时, $\textcircled{2} a^2x^2 + 2 \geq 0$ 不是一元二次不等式, $\textcircled{3}$ 是分式不等式, 只有 $\textcircled{1}\textcircled{4}\textcircled{5}$ 是一元二次不等式. 故选 C.

2. D 【解析】 $\because 0 < t < 1, \therefore \frac{1}{t} > 1 > t, \therefore$ 不等式 $(x-t) \cdot \left(x - \frac{1}{t}\right) < 0$ 的解集为 $\left\{x \mid t < x < \frac{1}{t}\right\}$. 故选 D.

3. C 【解析】在不等式组 $\begin{cases} x^2-1 < 0, \textcircled{1} \\ x^2-3x \geq 0 \textcircled{2} \end{cases}$ 中,

不等式 $\textcircled{1}$ 的解集为 $\{x|-1 < x < 1\}$, 不等式 $\textcircled{2}$ 的解集为 $\{x|x \leq 0$ 或 $x \geq 3\}$.

所以不等式组的解集为 $\{x|x \leq 0$ 或 $x \geq 3\} \cap \{x|-1 < x < 1\} = \{x|-1 < x \leq 0\}$. 故选 C.

4. AC 【解析】依题意可得方程 $ax^2+bx+c=0$ 的两根分别为 $x_1=-2, x_2=1$, 且 $a>0$,

$$\text{由一元二次方程根与系数的关系可得} \begin{cases} -2+1 = -\frac{b}{a} = -1, \\ -2 \times 1 = \frac{c}{a} = -2, \end{cases} \text{即}$$

$$b=a, c=-2a.$$

对于 A, 由 $a>0$ 可得 $b=a>0, c=-2a<0$, 故 A 正确;

对于 B, 易知 $4a+2b+c=4a>0$, 故 B 错误;

对于 C, 不等式 $bx+c>0$ 即为 $ax-2a>0$, 不等式两边同时除以 a 可得 $x-2>0$, 即 $x>2$, 所以不等式 $bx+c>0$ 的解集为 $\{x|x>2\}$, 故 C 正确;

对于 D, 不等式 $cx^2-bx+a<0$ 即为 $-2ax^2-ax+a<0$, 也即 $2x^2+x-1>0$, 所以 $(2x-1)(x+1)>0$, 解得 $x>\frac{1}{2}$ 或 $x<-1$,

即不等式 $cx^2-bx+a<0$ 的解集为 $\left\{x \mid x<-1 \text{ 或 } x>\frac{1}{2}\right\}$, 故 D

错误.

故选 AC.

5. ABC 【解析】不等式 $m(x-1)(x+2)-1>0$ 的解集是 $\{x|x_1 < x < x_2\}$, 其中 $x_1 < x_2$, 所以 $m<0$,

且 x_1, x_2 是一元二次方程 $mx^2+mx-2m-1=0$ 的解,

$$\text{所以 } x_1+x_2 = -1, x_1 \cdot x_2 = \frac{-2m-1}{m} = -2 - \frac{1}{m} > -2,$$

所以 $x_1+x_2+1=0, x_1 \cdot x_2+2>0$, 故 A, C 正确;

又因为 $|x_1-x_2| = \sqrt{(x_1+x_2)^2-4x_1x_2} = \sqrt{9+\frac{4}{m}} < 3$, 故 D 错误;

又方程 $m(x-1)(x+2)=0$ 的解是 1 和 -2 , 且不等式 $m(x-1)(x+2)-1>0$ 的解集为 $\{x|x_1 < x < x_2\}$,

所以 $-2 < x_1 < x_2 < 1$, 故 B 正确.

故选 ABC.

6. BCD 【解析】当 $k=1$ 时, 由 $2kx^2+kx-\frac{3}{8}=2x^2+x-\frac{3}{8}<0$, 解

$$\text{得 } -\frac{3}{4} < x < \frac{1}{4}, \text{ 故 A 错误;}$$

若不等式对任意 $x \in \mathbf{R}$ 恒成立, 则当 $k=0$ 时, $-\frac{3}{8}<0$ 恒成立,

当 $k \neq 0$ 时, $2k<0$, 且 $\Delta = k^2-4 \times 2k \times \left(-\frac{3}{8}\right) < 0$, 解得 $-3 < k < 0$,

综上, $-3 < k \leq 0$, 则整数 k 的取值集合为 $\{-2, -1, 0\}$, 故 B 正确;

不等式对 $0 \leq k \leq 1$ 恒成立, 即 $(2x^2+x)k - \frac{3}{8} < 0$ 对 $0 \leq k \leq 1$ 恒成立,

$$\text{则 } \begin{cases} (2x^2+x) \times 1 - \frac{3}{8} < 0, \\ (2x^2+x) \times 0 - \frac{3}{8} < 0, \end{cases} \text{ 解得 } -\frac{3}{4} < x < \frac{1}{4}, \text{ 故 C 正确;}$$

若恰有一个整数 x 使得不等式成立, 则 $k > 0$, 又因为 $-\frac{3}{8} < 0$, 且抛物线的对称轴为直线 $x = -\frac{k}{4k} = -\frac{1}{4}$, 所以该整数解为 $x = 0$,

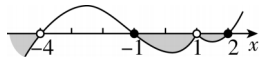
结合二次函数 $y = 2kx^2 + kx - \frac{3}{8}$ 的图象, 可得 $\begin{cases} 2k+k-\frac{3}{8} \geq 0, \\ 2k-k-\frac{3}{8} \geq 0, \end{cases}$ 解得 $k \geq \frac{3}{8}$, 故 D 正确. 故选 BCD.

7. $\{x | x < -4 \text{ 或 } -1 \leq x < 1 \text{ 或 } 1 < x \leq 2\}$ 【解析】原不等式可化为

$\frac{(x+1)(x-2)}{(x-1)^2(x+4)} \leq 0$, 此不等式等价于 $(x+1)(x-2)(x-1)^2(x+4) \leq 0$ 且 $x \neq 1, x \neq -4$.

分别令各个因式为 0, 可得不等式对应方程的根依次为 $-1, 2, 1, -4$.

在数轴上标出各根, 如图所示,



利用“穿针引线法”可得不等式的解集为 $\{x | x < -4 \text{ 或 } -1 \leq x < 1 \text{ 或 } 1 < x \leq 2\}$.

8. $\{V | 10 \leq V \leq 40\}$ 【解析】第一次操作后, 剩下的纯药液为

$V-10$, 第二次操作后, 剩下的纯药液为 $V-10-\frac{V-10}{V} \times 8$.

由题意可得 $V-10-\frac{V-10}{V} \times 8 \leq 0.6V$,

即 $V^2-45V+200 \leq 0$, 解得 $5 \leq V \leq 40$.

又 $V \geq 10$, 所以 $10 \leq V \leq 40$.

刷易错

易错点 1 不等式的解集要写成集合的形式

9. $\{x | -\sqrt{2} < x < \sqrt{2}\}$ 【解析】因为 $ax+b > 0$ 的解集为

$\{x | x < -\frac{1}{2}\}$, 所以 $-\frac{1}{2}a+b=0$, 且 $a < 0, b < 0$. 故 $a=2b < 0$, 故

$bx^2-a > 0$ 可化为 $x^2-2 < 0$, 解得 $-\sqrt{2} < x < \sqrt{2}$, 所以不等式 $bx^2-a > 0$ 的解集为 $\{x | -\sqrt{2} < x < \sqrt{2}\}$.

易错警示

由于不等式的解集是集合的形式, 因此在填空题中填写答案时, 一定要写成集合的形式, 如本题中若将答案写为 $-\sqrt{2} < x < \sqrt{2}$, 则是错误的.

易错点 2 含参数的二次不等式要注意分类讨论

10. $\{m | -4 < m \leq 0\}$ 【解析】不等式 $mx^2-mx-1 \geq 0$ 的解集为 \emptyset 等价于对任意的实数 $x \in \mathbf{R}$, 不等式 $mx^2-mx-1 < 0$ 恒成立. 当 $m=0$ 时, $-1 < 0$ 恒成立; 当 $m \neq 0$ 时, 要使不等式恒成立, 则需

$\begin{cases} m < 0, \\ m^2+4m < 0, \end{cases}$ 解得 $-4 < m < 0$. 综上, 实数 m 的取值范围是 $\{m | -4 < m \leq 0\}$.

围是 $\{m | -4 < m \leq 0\}$.

易错警示

由于 $ax^2+bx+c < 0$ 不一定是二次不等式, 因此当 $ax^2+bx+c < 0$ 的解集为 \mathbf{R} 时, 不但要考虑 $\begin{cases} a < 0, \\ \Delta = b^2-4ac < 0, \end{cases}$ 还要考虑 $a=b=0, c < 0$ 的特殊情况.

11. 【解】原不等式等价于 $(ax-1)(x-2)(x+1) > 0$. 当 $a=0$ 时, 原不等式等价于 $(x-2)(x+1) < 0$, 解得 $-1 < x < 2$, 此时原不等式的解集为 $\{x | -1 < x < 2\}$. 当 $a > 0$ 时, 原不等式等价于 $(x-\frac{1}{a})(x-2)(x+1) > 0$, 则当 $a=\frac{1}{2}$ 时, 原不等式的解集为 $\{x | x > -1 \text{ 且 } x \neq 2\}$. 当 $0 < a < \frac{1}{2}$ 时, 原不等式的解集为 $\{x | x > \frac{1}{a} \text{ 或 } -1 < x < 2\}$. 当 $a > \frac{1}{2}$ 时, 原不等式的解集为 $\{x | x > 2 \text{ 或 } -1 < x < \frac{1}{a}\}$. 当 $a < 0$ 时, 原不等式等价于 $(x-\frac{1}{a})(x-2)(x+1) < 0$, 则当 $a=-1$ 时, 原不等式的解集为 $\{x | x < 2 \text{ 且 } x \neq -1\}$. 当 $-1 < a < 0$ 时, 原不等式的解集为 $\{x | x < \frac{1}{a} \text{ 或 } -1 < x < 2\}$. 当 $a < -1$ 时, 原不等式的解集为 $\{x | x < -1 \text{ 或 } \frac{1}{a} < x < 2\}$.

易错警示

对任何分式不等式都是通过移项、通分等一系列步骤, 把不等号一边化为 0, 再转化为整式不等式来解决. 解此分式不等式先要等价转化为整式不等式, 再对 $ax-1$ 中的 a 进行分类讨论求解, 还需用到“穿针引线法”. 本题在分类讨论中容易忽略 $a=0$ 的情况, 以及对 $\frac{1}{a}, -1$ 和 2 的大小比较, 因此解含参数不等式时, 一要考虑参数总的取值范围, 二要用同一标准对参数进行划分, 做到不重不漏, 三要使划分后的不等式的解集的表达式是确定的.

易错点 3 解不等式时非等价变形而致误

12. $\{x | 2 < x \leq 12\}$ 【解析】原不等式等价于 $\frac{3x+4}{x-2} - 4 \geq 0$, 化简得

$\frac{12-x}{x-2} \geq 0$, 即 $\begin{cases} (12-x)(x-2) \geq 0, \\ x-2 \neq 0, \end{cases}$ 解得 $2 < x \leq 12$.

故原不等式的解集为 $\{x | 2 < x \leq 12\}$.

易错警示

本题的易错点在于分式变整式时, 两边同乘 $(x-2)$, 忽略分母不为零导致错误. 不等号右边不为零的分式不等式求解时应该移项、通分、化简, 整理成 $\frac{ax+b}{cx+d} \geq 0$ (c, d 不同时为 0) 的形式, 再化成整式不等式 $(ax+b)(cx+d) \geq 0$ 且 $cx+d \neq 0$ 求解.

第二章全章训练

1. B 【解析】因为 $a > 1$ 且 $b > 3$, 所以能推出 $a + b > 4$;

但 $a + b > 4$ 不能推出 $a > 1$ 且 $b > 3$ (如 $a = -1, b = 6$),

所以“ $a + b > 4$ ”是“ $a > 1$ 且 $b > 3$ ”的必要不充分条件. 故选 B.

2. C 【解析】解不等式 $x - \frac{a}{2} < 1$, 得 $x < 1 + \frac{a}{2}$, 而不等式 $x -$

$\frac{a}{2} < 1$ 的解集为 $\{x | x < 1\}$, 所以 $1 + \frac{a}{2} = 1$, 解得 $a = 0$, 所以一元

二次方程 $x^2 + ax + 1 = 0$ 的判别式 $\Delta = a^2 - 4 = -4 < 0$, 所以关于 x 的一元二次方程 $x^2 + ax + 1 = 0$ 没有实数根. 故选 C.

3. C 【解析】因为 $0 < a < \sqrt{2}$, 所以 $2 - a^2 > 0$, 所以 $a\sqrt{2 - a^2} =$

$\sqrt{a^2(2 - a^2)} \leq \frac{a^2 + (2 - a^2)}{2} = 1$, 当且仅当 $a^2 = 2 - a^2$, 即 $a = 1$ 时

取等号, 所以 $a\sqrt{2 - a^2}$ 的最大值为 1. 故选 C.

4. C 【解析】因为不等式 $ax^2 - x + c > 0$ 的解集为 $\{x | -2 < x < 1\}$, 所

以 $\begin{cases} a < 0, \\ -2 \times 1 = \frac{c}{a}, \\ -2 + 1 = \frac{1}{a}, \end{cases}$ 解得 $\begin{cases} a = -1, \\ c = 2, \end{cases}$ 所以函数 $y = ax^2 + x + c$ 为 $y = -x^2 +$

$x + 2$. 令 $-x^2 + x + 2 = 0$, 解得 $x = -1$ 或 $x = 2$, 故抛物线开口向下, 与 x 轴的交点的横坐标为 $-1, 2$. 故选 C.

5. A 【解析】因为不等式 $ax + b > 0$ 的解集为 $\{x | x < -1\}$,

所以 $a < 0$ 且 $-\frac{b}{a} = -1$, 即 $a = b < 0$.

不等式 $ax^2 - (2a + b)x + 2b > 0$ 可转化为 $x^2 - 3x + 2 < 0$,

解得 $1 < x < 2$, 即不等式 $ax^2 - (2a + b)x + 2b > 0$ 的解集为 $\{x | 1 < x < 2\}$. 故选 A.

6. B 【解析】由 $a - b = 2 + \sqrt{3} - \sqrt{7}$, 且 $(2 + \sqrt{3})^2 = 7 + 4\sqrt{3} > 7$, 得 $a > b$;

由 $a - c = 2 + \sqrt{2} - \sqrt{6}$, 且 $(2 + \sqrt{2})^2 = 6 + 4\sqrt{2} > 6$, 得 $a > c$;

由 $b - c = (\sqrt{7} + \sqrt{2}) - (\sqrt{6} + \sqrt{3})$, 且 $(\sqrt{6} + \sqrt{3})^2 = 9 + 2\sqrt{18} > 9 + 2\sqrt{14} = (\sqrt{7} + \sqrt{2})^2$, 得 $c > b$.

所以 $a > c > b$. 故选 B.

7. A 【解析】设毛诗有 x 本, 春秋有 y 本, 周易有 z 本, 学生人数

为 $m, x, y, z, m \in \mathbf{N}^*$, 则 $\begin{cases} x + y + z = 94, \\ \frac{m}{x} = 3, \\ \frac{m}{y} = 4, \\ \frac{m}{z} = 5, \end{cases}$ 解得 $\begin{cases} m = 120, \\ x = 40, \\ y = 30, \\ z = 24. \end{cases}$ 故选 A.

8. A 【解析】根据题意, 正实数 x, y, z 满足 $x^2 - xy + 4y^2 - z = 0$, 则 $z = x^2 - xy + 4y^2$,

所以 $\frac{xy}{z} = \frac{xy}{x^2 - xy + 4y^2} = \frac{1}{\frac{x}{y} - 1 + \frac{4y}{x}} \leq \frac{1}{2\sqrt{\frac{x}{y} \cdot \frac{4y}{x}} - 1} = \frac{1}{3}$,

当且仅当 $\frac{x}{y} = \frac{4y}{x}$, 即 $x = 2y$ 时等号成立, 则此时 $z = x^2 - xy + 4y^2 = 6y^2$,

当 $\frac{xy}{z}$ 取得最大值时, $\frac{2}{x} + \frac{1}{y} - \frac{3}{z} = \frac{2}{2y} + \frac{1}{y} - \frac{3}{6y^2} = -\frac{1}{2y^2} + \frac{2}{y} = -\frac{1}{2}\left(\frac{1}{y} - 2\right)^2 + 2$,

分析可得, 当 $\frac{1}{y} = 2$, 即 $y = \frac{1}{2}$ 时, $\frac{2}{x} + \frac{1}{y} - \frac{3}{z}$ 取得最大值 2. 故选 A.

9. ABC 【解析】由题意得 $a < -b < 0, 0 < b < -a$, 所以 $b \cdot b < -a \cdot b, a \cdot a > -b \cdot a, 0 < b^2 < (-a)^2$, 即 $b^2 < -ab, a^2 > -ab, a^2 > b^2$, 故选 ABC.

10. ABC 【解析】因为不等式 $ax^2 + bx + c > 0$ 的解集是 $\{x | 1 < x < 2\}$, 所以 $a < 0$, 故 A 正确;

由题知, 1, 2 为方程 $ax^2 + bx + c = 0$ 的两个实数根, 则 $4a + 2b + c = 0$, 故 B 正确;

抛物线 $y = ax^2 + bx + c$ 的图象开口向下且与 x 轴的交点为 (1, 0) 和 (2, 0), 则当 $x = 3$ 时, $9a + 3b + c < 0$, 故 C 正确;

由一元二次方程根与系数的关系得 $\begin{cases} 1 + 2 = -\frac{b}{a}, \\ 1 \times 2 = \frac{c}{a}, \end{cases}$ 所以 $b = -3a, c = 2a$,

则不等式 $cx^2 - bx + a < 0$ 即为 $2ax^2 + 3ax + a < 0$, 可化为 $2x^2 + 3x + 1 > 0$,

解得 $x < -1$ 或 $x > -\frac{1}{2}$, 故 D 错误. 故选 ABC.

11. BC 【解析】对于 A, $y = x(4 - 3x) = -3x^2 + 4x = -3\left(x - \frac{2}{3}\right)^2 + \frac{4}{3}$, 显然 $x = \frac{2}{3}$ 时取得最大值, 故 A 正确;

对于 B, 由 $x < -1$, 得 $x + 1 < 0$, 则 $x + \frac{1}{x+1} = (x+1) + \frac{1}{x+1} - 1 =$

$- \left[-(x+1) + \frac{1}{-(x+1)} \right] - 1 \leq -2\sqrt{-(x+1) \cdot \frac{1}{-(x+1)}} - 1 =$

-3 , 当且仅当 $-(x+1) = \frac{1}{-(x+1)}$, 即 $x = -2$ 时等号成立, 故 B 错误;

对于 C, $y = \frac{x^2 + 5}{\sqrt{x^2 + 4}} = \sqrt{x^2 + 4} + \frac{1}{\sqrt{x^2 + 4}} \geq$

$$2\sqrt{\sqrt{x^2+4} \cdot \frac{1}{\sqrt{x^2+4}}} = 2,$$

当且仅当 $\sqrt{x^2+4} = 1$ 时等号成立, 而 $\sqrt{x^2+4} \geq 2$, 取不到最小值 2, 故 C 错误;

对于 D, 因为 $a > 0, b > 0$, 且 $a+b=2$,

$$\begin{aligned} \text{所以 } \frac{1}{a} + \frac{2}{b} &= \frac{1}{2}(a+b) \left(\frac{1}{a} + \frac{2}{b} \right) = \frac{1}{2} \left(3 + \frac{b}{a} + \frac{2a}{b} \right) \geq \\ &\frac{1}{2} \left(3 + 2\sqrt{\frac{b}{a} \cdot \frac{2a}{b}} \right) = \frac{3+2\sqrt{2}}{2}, \text{ 当且仅当 } \frac{b}{a} = \frac{2a}{b}, \text{ 即 } a = \\ &2(\sqrt{2}-1), b = 2(2-\sqrt{2}) \text{ 时等号成立, 故 D 正确.} \end{aligned}$$

故选 BC.

12. $\{3a-b \mid -2 \leq 3a-b \leq 7\}$ 【解析】设 $3a-b = x(a+b) + y(a-b) = (x+y)a + (x-y)b$, 则

$$\begin{cases} x+y=3, \\ x-y=-1, \end{cases} \text{ 解得 } \begin{cases} x=1, \\ y=2, \end{cases}$$

所以 $3a-b = (a+b) + 2(a-b)$.

因为 $2 \leq a+b \leq 5, -2 \leq a-b \leq 1$,

所以 $-2 \leq (a+b) + 2(a-b) \leq 7$,

即 $3a-b$ 的取值范围是 $\{3a-b \mid -2 \leq 3a-b \leq 7\}$.

13. $3+2\sqrt{2}$ 【解析】由题意, $x > 0, y > 0, x+y=xy$, $\therefore \frac{1}{x} + \frac{1}{y} = 1$,

$$\begin{aligned} \therefore 2x+y &= (2x+y) \left(\frac{1}{x} + \frac{1}{y} \right) = 2 + \frac{2x}{y} + \frac{y}{x} + 1 \geq 3 + 2\sqrt{\frac{2x}{y} \cdot \frac{y}{x}} = 3 + \\ &2\sqrt{2}, \text{ 当且仅当 } \frac{2x}{y} = \frac{y}{x}, \text{ 即 } x = \frac{\sqrt{2}}{2} + 1, y = \sqrt{2} + 1 \text{ 时等号成立,} \end{aligned}$$

故 $2x+y$ 的最小值为 $3+2\sqrt{2}$.

14. $\left\{x \mid x \leq \frac{2}{3} \text{ 或 } x \geq 1\right\}$ $\{a \mid -2 \leq a \leq 2\}$ 【解析】若 $a = -3$, 则不

等式 $(ax+2)(x-1) \leq 0$ 即为 $(-3x+2)(x-1) \leq 0$,

解得 $x \leq \frac{2}{3}$ 或 $x \geq 1$, 即该不等式的解集是 $\left\{x \mid x \leq \frac{2}{3} \text{ 或 } x \geq 1\right\}$.

若对任意的 $-1 \leq x \leq 1$, 不等式 $(ax+2)(x-1) \leq 0$ 恒成立,

当 $x=1$ 时, $(ax+2)(x-1) = 0$, 此时 $a \in \mathbf{R}$,

当 $-1 \leq x < 1$ 时, $x-1 < 0$, 不等式 $(ax+2)(x-1) \leq 0$ 可化为 $ax+2 \geq$

0, 即当 $-1 \leq x < 1$ 时, $ax+2 \geq 0$ 恒成立, 有 $\begin{cases} -a+2 \geq 0, \\ a+2 \geq 0, \end{cases}$ 解得 $-2 \leq a \leq 2$,

所以对任意的 $-1 \leq x \leq 1$, 不等式 $(ax+2)(x-1) \leq 0$ 恒成立, 实数 a 的取值范围是 $\{a \mid -2 \leq a \leq 2\}$.

15. 【解】(1) 因为 $(a-2)(a-6) = (a-3)(a-5) = (a^2-8a+12) - (a^2-8a+15) = -3 < 0$,

所以 $(a-2)(a-6) < (a-3)(a-5)$.

(2) 由 $2 < x < 3, 2 < y < 3$, 得 $4 < 2y < 6$, 故 $6 < x+2y < 9$.

$$\text{又 } \frac{1}{3} < \frac{1}{y} < \frac{1}{2}, \text{ 故 } \frac{2}{3} < \frac{x}{y} < \frac{3}{2}.$$

16. 【证明】(1) $\because a+b=1, a>0, b>0$,

$$\begin{aligned} \therefore \frac{1}{a} + \frac{1}{b} + \frac{1}{ab} &= \frac{1}{a} + \frac{1}{b} + \frac{a+b}{ab} = 2\left(\frac{1}{a} + \frac{1}{b}\right) = 2\left(\frac{a+b}{a} + \frac{a+b}{b}\right) = \\ &2\left(\frac{b}{a} + \frac{a}{b}\right) + 4 \geq 4+4=8, \text{ 当且仅当 } a=b=\frac{1}{2} \text{ 时取等号,} \\ \therefore \frac{1}{a} + \frac{1}{b} + \frac{1}{ab} &\geq 8. \end{aligned}$$

$$(2) \because \left(1+\frac{1}{a}\right)\left(1+\frac{1}{b}\right) = 1 + \frac{1}{a} + \frac{1}{b} + \frac{1}{ab}, \text{ 由 (1) 知, } \frac{1}{a} + \frac{1}{b} + \frac{1}{ab} \geq 8, \text{ 当且仅当 } a=b=\frac{1}{2} \text{ 时取等号,}$$

$$\therefore 1 + \frac{1}{a} + \frac{1}{b} + \frac{1}{ab} \geq 9, \therefore \left(1+\frac{1}{a}\right)\left(1+\frac{1}{b}\right) \geq 9.$$

17. 【解】(1) 当 $0 < x < 40$ 时, $R(x) = 2\,000x - (40x^2 + 400x) - 8\,000 = -40x^2 + 1\,600x - 8\,000$, 当 $x \geq 40$ 时, $R(x) = 2\,000x - \left(2\,004x + \frac{40\,000}{x} - 18\,000\right) - 8\,000 = -4x - \frac{40\,000}{x} + 10\,000$,

$$\text{所以 } R(x) = \begin{cases} -40x^2 + 1\,600x - 8\,000, & 0 < x < 40, \\ -4x - \frac{40\,000}{x} + 10\,000, & x \geq 40. \end{cases}$$

(2) 当 $0 < x < 40$ 时, $R(x) = -40x^2 + 1\,600x - 8\,000 = -40(x-20)^2 + 8\,000$,

所以当 $x=20$ 时, $R(x)$ 有最大值, 为 8 000;

$$\begin{aligned} \text{当 } x \geq 40 \text{ 时, } R(x) &= -\left(4x + \frac{40\,000}{x}\right) + 10\,000 \leq \\ &-2\sqrt{4x \cdot \frac{40\,000}{x}} + 10\,000 = 9\,200, \end{aligned}$$

当且仅当 $4x = \frac{40\,000}{x}$, 即 $x=100$ 时, $R(x)$ 有最大值, 为 9 200,

所以当 $x=100$ 时, $R(x)$ 有最大值, 为 9 200.

综上所述, 当 2024 年的年产量为 100 万辆时, 企业所获利润最大, 最大利润为 9 200 万元.

18. 【解】(1) 当 $m=4$ 时, 方程为 $x^2+8x+6=0$,

由一元二次方程根与系数的关系得 $x_1+x_2=-8, x_1x_2=6$,

所以 $x_1^2+x_2^2 = (x_1+x_2)^2 - 2x_1x_2 = 64 - 2 \times 6 = 52$.

故当 $m=4$ 时, $x_1^2+x_2^2$ 的值为 52.

$$(2) \text{ 由题意得 } \begin{cases} \Delta > 0, \\ x_1x_2 < 0, \end{cases} \text{ 即 } \begin{cases} 4m^2 - 4(m+2) > 0, \\ m+2 < 0, \end{cases} \text{ 解得 } m < -2.$$

故当 $m < -2$ 时, 方程有一正根一负根.

$$(3) \text{ 由题意得 } \begin{cases} \Delta > 0, \\ x_1+x_2 > 0, \\ x_1x_2 > 0, \end{cases} \text{ 即 } \begin{cases} 4m^2 - 4(m+2) > 0, \\ -2m > 0, \\ m+2 > 0, \end{cases} \text{ 解得 } -2 < m < -1.$$

故当 $-2 < m < -1$ 时, 方程有两个不相等的正根.

19. 【解】(1) 由题意知, $1, c(c \geq 1)$ 是方程 $bx^2-3x+2=0$ 的两根, 由 $b-3+2=0$, 得 $b=1$, 由 $x^2-3x+2 > 0$ 得 $x < 1$ 或 $x > 2$, 则 $c =$

2. 故 $b=1, c=2$.

(2) 原不等式可化为 $ax^2 - (2a+1)x + 2 < 0 \Rightarrow (ax-1)(x-2) < 0$.

若 $a=0$, 则 $-x+2 < 0$, 解得 $x > 2$.

若 $a < 0$, 则 $(x - \frac{1}{a})(x-2) > 0$, 解得 $x < \frac{1}{a}$ 或 $x > 2$.

若 $a > 0$, 则 $(x - \frac{1}{a})(x-2) < 0$,

当 $\frac{1}{a} < 2$, 即 $a > \frac{1}{2}$ 时, 解得 $\frac{1}{a} < x < 2$;

当 $\frac{1}{a} = 2$, 即 $a = \frac{1}{2}$ 时, 不等式无解;

当 $\frac{1}{a} > 2$, 即 $0 < a < \frac{1}{2}$ 时, 解得 $2 < x < \frac{1}{a}$.

综上所述, 当 $a < 0$ 时, 不等式的解集为 $\{x \mid x < \frac{1}{a} \text{ 或 } x > 2\}$;

当 $a = 0$ 时, 不等式的解集为 $\{x \mid x > 2\}$;

当 $0 < a < \frac{1}{2}$ 时, 不等式的解集为 $\{x \mid 2 < x < \frac{1}{a}\}$;

当 $a = \frac{1}{2}$ 时, 不等式无解;

当 $a > \frac{1}{2}$ 时, 不等式的解集为 $\{x \mid \frac{1}{a} < x < 2\}$.

(3) 问题转化为 $(m+1)x^2 - (m-1)x + m - 1 \geq 0$ 对一切 $-\frac{1}{2} \leq$

$x \leq \frac{1}{2}$ 恒成立.

所以 $m(x^2 - x + 1) + x^2 + x - 1 \geq 0 \Rightarrow m(x^2 - x + 1) \geq -(x^2 + x - 1)$.

因为 $x^2 - x + 1 = (x - \frac{1}{2})^2 + \frac{3}{4} > 0$ 恒成立,

所以 $m \geq -\frac{x^2 + x - 1}{x^2 - x + 1} (-\frac{1}{2} \leq x \leq \frac{1}{2})$.

$-\frac{x^2 + x - 1}{x^2 - x + 1} = -\frac{(x^2 - x + 1) + 2(x - 1)}{x^2 - x + 1} = -1 - \frac{2(x - 1)}{x^2 - x + 1}$,

设 $x - 1 = t$, 则 $x = t + 1 (-\frac{3}{2} \leq t \leq -\frac{1}{2})$,

且 $-1 - \frac{2t}{(t+1)^2 - (t+1) + 1} = -1 - \frac{2t}{t^2 + t + 1} = -1 - \frac{2}{t + \frac{1}{t} + 1}$

$-1 + \frac{2}{-t + \frac{1}{-t} - 1}$,

因为 $-t + \frac{1}{-t} \geq 2\sqrt{-t \cdot \frac{1}{(-t)}} = 2$, 当且仅当 $t = -1$ 时取 "=",

所以 $-t + \frac{1}{-t} - 1 \geq 1$, 所以 $\frac{2}{-t + \frac{1}{-t} - 1} \leq 2$, 所以 $-1 +$

$\frac{2}{-t + \frac{1}{-t} - 1} \leq 1$.

所以 $m \geq 1$, 故实数 m 的取值范围是 $\{m \mid m \geq 1\}$.

第三章 函数的概念与性质

3.1 函数的概念及其表示

3.1.1 函数的概念

基础必刷

1. D 【解析】对于 A, 定义域为 $[0, 1]$, 值域为 $[0, 1]$, 与条件矛盾, A 错误;

对于 B, 定义域为 $[-1, 1]$, 值域为 $[0, 1]$, 与条件矛盾, B 错误;

对于 C, 有一个自变量 x 对应两个 y 值的情况, 不是函数, 与条件矛盾, C 错误;

对于 D, 定义域为 $[-1, 0]$, 值域为 $[-1, 1]$, 符合条件, D 正确. 故选 D.

2. ABC 【解析】对选项 A: $y = |x|$, $A = \{-1, 0, 1, 2\}$, 对应的值域为 $\{0, 1, 2\} \subseteq B$, 正确.

对选项 B: $y = x^2$, $A = \{-1, 0, 1, 2\}$, 对应的值域为 $\{0, 1, 4\} \subseteq B$, 正确.

对选项 C: $y = x + 1$, $A = \{-1, 0, 1, 2\}$, 对应的值域为 $\{0, 1, 2, 3\} \subseteq B$, 正确.

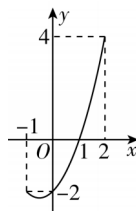
对选项 D: $y = 2x$, $A = \{-1, 0, 1, 2\}$, 对应的值域为 $\{-2, 0, 2, 4\} \not\subseteq B$, 错误.

故选 ABC.

3. B 【解析】函数 $y = x^2 + x - 2$ 的图象的对称轴为直线 $x = -\frac{1}{2}$, 作出函数 $f(x) = x^2 + x - 2$, $x \in [-1, 2]$ 的图象, 观察图象

可知 $f(x)_{\max} = f(2) = 4$, $f(x)_{\min} = f(-\frac{1}{2}) = -\frac{9}{4}$,

所以函数的值域为 $[-\frac{9}{4}, 4]$. 故选 B.



4. C 【解析】由题意得 $\begin{cases} 2+x \geq 0, \\ 16-x^2 > 0, \end{cases}$ 解得 $-2 \leq x < 4$, 故定义域为 $[-2, 4)$. 故选 C.